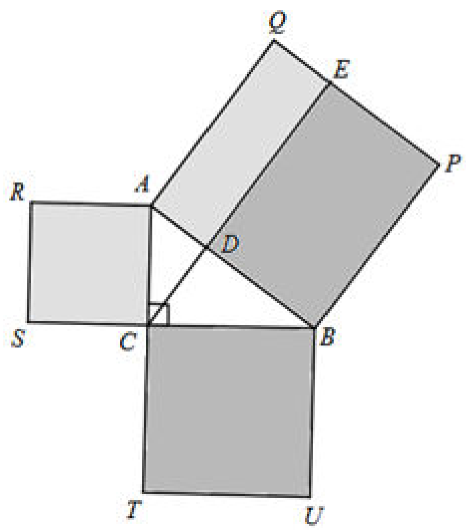
El Teorema de Pitágoras

- El **teorema de Pitágoras** establece una relación aritmética entre las medidas de los catetos y la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo.

A. TEOREMA (Pitágoras)

A pesar de ser conocido tiempo atrás por culturas milenarias como los babilonios y los egipcios, fueron Los griegos en 500 – 600 A.C. finalmente demostraron el caso general.



En la figura, hemos representado un triángulo rectángulo, y cuadrados construidos a partir de los lados.

Queremos justificar que la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños es igual que el área del cuadrado grande.

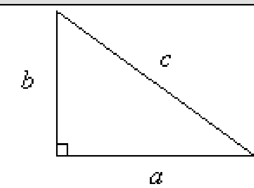
Para eso, hemos dividido por la altura $\overline{CD}$ el cuadrado grande en dos rectángulos.

Como una consecuencia de la semejanza de triángulos que establece esa altura, se conoce que $b^2 = m \cdot c,\ a^2 = n \cdot c$.

Eso justifica que cada uno de esos rectángulos tiene la misma área que el cuadrado pequeño marcado con la misma tonalidad.

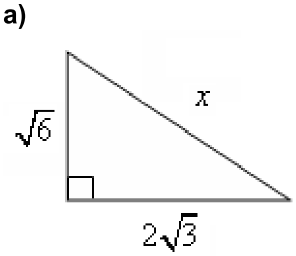
En resumen, el **teorema de Pitágoras** establece:

> "En cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". En la figura, $a^2 + b^2 = c^2$.

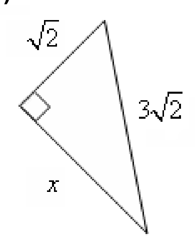


EJEMPLO 1. En las siguientes figuras, encuentre el valor de x

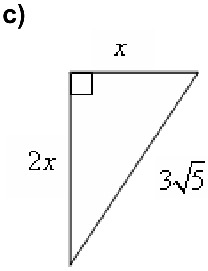
a)



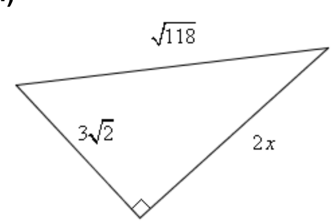
b)



c)



d)



- El **teorema de Pitágoras** nos permite resolver problemas dónde su enunciado está dado en palabras, en particular, cuando las situaciones vienen de nuestra vida cotidiana.

B. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Ejercicio B. Resuelva los siguientes problemas.

1. Un hombre camina $12km$ al norte y luego $5km$ al este. ¿Cuál es la distancia desde el punto de partida al punto de llegada del hombre?

2. Una escalera de $5m$ está apoyada en una pared. La distancia del piso a donde se apoya la escalera es $3m$. ¿Cuál es la distancia de la pared al pie de la escalera?

3. Un avión vuela a una altura de $10km$ y avanza a una velocidad de $360 \frac{km}{h}$. Calcule aproximadamente la distancia desde el punto de partida, en la tierra, después de viajar 15 minutos.

4. Un hombre camina $x\,km$ hacia el este. Luego gira y camina en dirección al norte $2x\,km$. Si se sabe que la distancia desde el punto donde inicio hasta el punto donde se encuentra actualmente es de $10km$. ¿Cuánto aproximadamente caminó en total?

5. En un terrero rectangular, cuyo ancho mide $80m$ y diagonal $170m$, se debe colocar, a través del largo, cada $25m$ postes de luz. Si el primero se coloca en la esquina, ¿cuántos postes se deben colocar?

6. La parte más alta de una escalera apoyada en una pared vertical, alcanza una altura de $3,6m$ en dicha pared, si el pie de la escalera queda sobre el piso a $1,5m$ de la pared, entonces ¿cuál es la longitud de la escalera?

7. Encuentre el área de un triángulo isósceles con $AB = BC = 41cm$ y $AC = 18cm$.

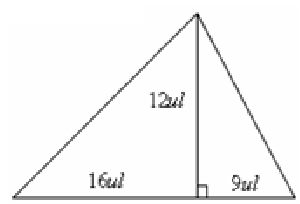
8. El ΔDEF es isósceles con $DE = EF$, $DF = 24cm$ y el área es $168cm^2$. ¿Cuánto es el perímetro del triángulo?

9. Calcule el área de ΔABC, si $BC = AC = 15$ y $AB = 18$.

10. Encuentre el área de un triángulo equilátero de lado $4ul$.

11. En un triángulo rectángulo los catetos están en razón $9:40$. Si el perímetro del triángulo es 360. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

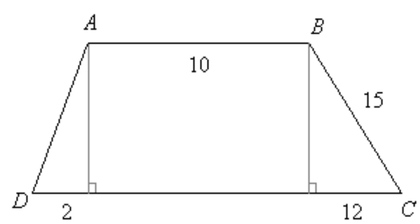
12. Encuentre el perímetro del triángulo en la figura:



13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $15ul$. Si un cateto mide el doble del otro cateto, entonces, ¿Cuál es la medida del cateto de menor longitud?

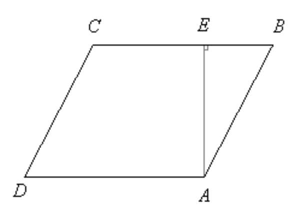
14. El área de un triángulo rectángulo es 42. Si la longitud de uno de los catetos es 6, entonces ¿cuál es el perímetro de ese triángulo?

15. De acuerdo con los datos de la figura, ¿Cuál es el área y el perímetro del trapecio $ABCD$?



16. En el trapecio $ABCD$, los ángulos $\angle A$ y $\angle D$ son rectos. Si $AB = 10$, $BC = 15$ y $DC = 22$. ¿Cuánto es el área del trapecio?

17. En el siguiente paralelogramo, el área es $96cm^2$, $DC = 10cm$ y $BE = 8cm$. ¿Cuánto es el perímetro?



18. Si la longitud de un lado de un rombo es $17cm$ y la de una diagonal es $16cm$, ¿cuánto mide la otra diagonal?

19. Si el área de un rombo es $336ul^2$ y una diagonal $14ul$, encuentre la otra diagonal y el perímetro.

20. En un rombo de área $150ul^2$, una diagonal mide el triple de la otra. Calcule el perímetro.

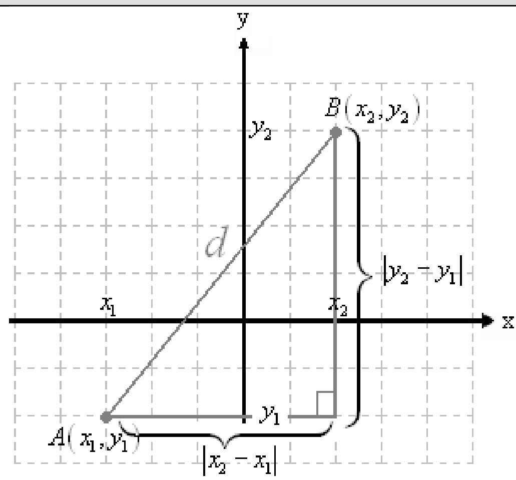
- Mediante el Teorema de Pitágoras es posible determinar la **distancia entre dos puntos** en el plano cartesiano.

C. Fórmula de distancia

En esta sección trabajaremos con **geometría analítica**, es decir, los puntos están referidos a un sistema de coordenadas rectangulares.

El Teorema de Pitágoras, nos permite encontrar la distancia entre dos puntos dados de esta forma.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. La **distancia** entre A y B, denotada AB es la longitud del segmento $\overline{AB}$ en el plano cartesiano.



Notemos que se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$. Luego, por el teorema de Pitágoras $AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$:

Como $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ y $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$, podemos prescindir del valor absoluto:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$, ya que $AB \geq 0$.

En la prueba, los valores absolutos se utilizan porque son distancias, y no pueden ser negativas.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. La **distancia** d entre A y B, se calcula con la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

EJEMPLO 2. Encuentre la distancia entre los puntos $(-2,-1)$ y $(4,-2)$.

Cuando nos piden la ecuación de un elemento geométrico, lo que buscamos es una ecuación en dos variables, de manera que todos los puntos (x, y) del plano cartesiano que satisfacen la ecuación pertenecen a la figura y, además, todos los puntos que pertenecen a figura satisfacen la ecuación.

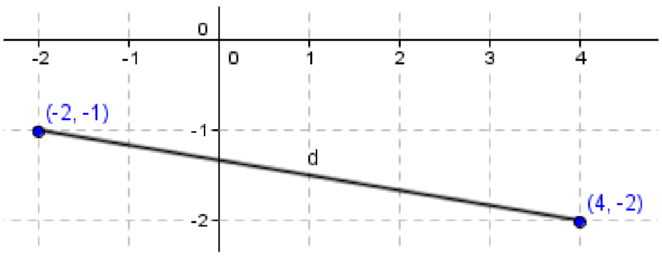
EJEMPLO 3. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro $(3,-1)$ y radio 4.

Utilizando la fórmula de distancia podemos determinar si un triángulo en el plano cartesiano es rectángulo o no, verificando si cumple o no el Teorema de Pitágoras.

EJEMPLO 4. Muestre que el triángulo con vértices: $A(-2,2); B(3,4); C(2,-8)$ es rectángulo.

Soluciones C.

EJEMPLO 11: Encuentre la distancia entre los puntos $(-2,-1)$ y $(4,-2)$.

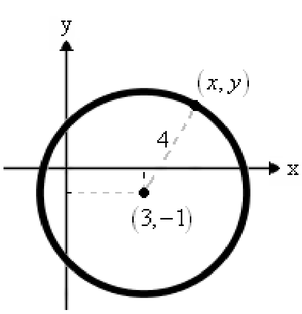


Aplicando la fórmula con $\left(\underbrace{-2}_{x_1},\underbrace{-1}_{y_1}\right)$ y $\left(\underbrace{4}_{x_2},\underbrace{-2}_{y_2}\right)$,

obtenemos: $d=\sqrt{\left[4-(-2)\right]^2+\left[-2-(-1)\right]^2}$.

Simplificando: $d=\sqrt{(6)^2+(-1)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}ul$.

EJEMPLO 12: Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro $(3,-1)$ y radio 4



Esa circunferencia es el conjunto de puntos que están a 4 unidades de distancia del centro $(3,-1)$.

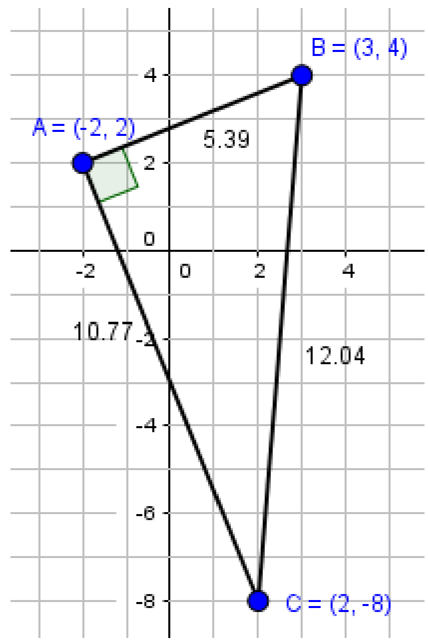
Si denotamos con (x,y) un punto arbitrario, para que pertenezca a la circunferencia es suficiente y necesario que $\sqrt{(x-3)^2+\left[y-(-1)\right]^2}=4$.

Simplificando: $(x-3)^2+(y+1)^2=16$.

- En general, la ecuación de la circunferencia de centro (h,k) y radio r es $(x-k)^2+(y-k)^2=r^2$.

EJEMPLO 13: Muestre que el triángulo con vértices: $A(-2,2);B(3,4);C(2,-8)$ Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro $(3,-1)$ y radio 4.

Al representar la situación en el plano cartesiano tenemos:



Calculamos la medida de los lados:

$$AB=\sqrt{\left[3-(-2)\right]^2+(4-2)^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$$
$$BC=\sqrt{(2-3)^2+(-8-4)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-12)^2}=\sqrt{145}$$
$$CA=\sqrt{(-2-2)^2+\left[2-(-8)\right]^2}=\sqrt{(-4)^2+10^2}=\sqrt{116}$$

El lado de mayor medida es $\overline{BC}$, por lo que habría que verificar que $AB^2+CA^2=BC^2$:

$$\left(\sqrt{29}\right)^2+\left(\sqrt{116}\right)^2=\left(\sqrt{145}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 29+116=145 \Leftrightarrow 145=145$$

Como los lados cumplen el teorema de Pitágoras, deducimos que es rectángulo en A.

Ejercicio C.

I PARTE: Calcule la distancia entre cada pareja de puntos en el plano cartesiano.

1. $A(1,2);B(6,14)$
2. $C(-1,4);B(1,2)$
3. $A(-2,-3);B(-4,-6)$
4. $F(-2,1);G(5,-3)$

II PARTE: Realice las siguientes verificaciones:

1. El triángulo con vértices $D(3,-5);E(4,3);F(7,1)$ es rectángulo.
2. El triángulo con vértices $E(4,7);F(-1,4);G(2,-1)$ es rectángulo e isósceles.
3. El triángulo con vértices $A(-2,0);B(6,0);C\left(2,4\sqrt{3}\right)$ es equilátero.
4. El triángulo con vértices $A(-1,2);B(3,3);C(3,0)$ no es rectángulo, ni isósceles.

III PARTE: Resuelva los siguientes problemas

1. Juan está 2km al norte y 3 al oeste del colegio. Ana está 3km al este y 12km al norte. ¿Cuál es aproximadamente la distancia entre ellos?
2. Marco debe hacer el siguiente recorrido. Primero sale de su casa que está 3km al sur y 3km al oeste desde la casa de su tía. Después, debe ir a la casa de su abuela que está 4km al norte y 8km al este referidos desde la casa de su tía, después irá a la casa de esta, y por último volverá a su casa. Si hace todos los recorridos en línea recta, ¿cuál es la distancia que recorre?
3. Encuentre los puntos que están a una distancia de $5ul$ del punto $(1,3)$ tal que su coordenada en y es -1.
4. Encuentre los puntos donde la circunferencia de centro $(-2,1)$ y radio 4 interseca el eje de las ordenadas (es decir, los puntos de la forma $(0,y)$ que pertenecen a esa circunferencia).
5. El punto $(1,4)$ pertenece a la circunferencia de centro $(-3,2)$. ¿Cuál es el área de ese círculo?
6. Encuentre el área del círculo con centro $O(-2,3)$, sabiendo que el punto $A(-5,6)$ pertenece a la circunferencia.
7. Si $A(-4,2)$, $B(-2,-2)$, $C(4,0)$ y $D(0,2)$. Encuentre el área y el perímetro del cuadrilátero $ABCD$.
8. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $(-4,0)$ y $(0,2)$. Encuentre el perímetro y el área del cuadrado.

Teorema de Pitágoras (Respuestas)

Ejercicio B.

1. $13km$
2. $4m$
3. $90,55km$
4. $13,42 \sim 6\sqrt{5}$
5. 7 postes
6. $3,9$
7. $A = 360cm^2$
8. $P = \left(24 + 4\sqrt{85}\right)cm$
9. $A = 108ul^2$
10. $A = 4\sqrt{3}ul^2$
11. 164
12. $60ul$
13. $3\sqrt{5}$
14. $20 + 2\sqrt{58}$
15. $A = 153ul^2$

    $P = \left(49 + \sqrt{85}\right)ul$
16. $A = 144ul^2$
17. $P = 52cm$
18. $D = 30cm$
19. $D = 48,\ P = 100ul$
20. $P = 20\sqrt{10}ul$

Ejercicio C.

I PARTE:

1. $AB = 13$
2. $BC = 2\sqrt{2}$
3. $AB = \sqrt{13}$
4. $FG = \sqrt{65}$

II PARTE:

1. Los lados miden: $DF = \sqrt{52};\ ED = \sqrt{65};\ EF = \sqrt{13}$

   $\sqrt{52}^2 + \sqrt{13}^2 = \sqrt{65}^2$. Es rectángulo en F.
2. Los lados miden: $EF = \sqrt{34};\ FG = \sqrt{34};\ GE = \sqrt{68}$

   $\sqrt{34}^2 + \sqrt{34}^2 = \sqrt{68}^2$. Es rectángulo en F.
3. Todos los lados miden 8
4. Los lados miden: $BC = 3;\ AC = \sqrt{20};\ AB = \sqrt{17}$

   y $3^2 + \sqrt{17}^2 \neq \sqrt{20}^2$

III PARTE:

1. $\approx 11,66km$
2. $\approx 26,22km$
3. $(4,-1), (-2,-1)$
4. $\left(0, 1 + 2\sqrt{3}\right), \left(0, 1 - 2\sqrt{3}\right)$
5. $A = 20\pi$
6. $A = 18\pi$

   $A = 18\ cm^2$
7. $P = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 4$

   $\approx 19,26\ cm$
8. $A = 20\ cm^2$

   $P = 8\sqrt{5} \approx 17,88\ cm$